Problem 1 : Minimalna brzina meteora

Počećemo sa jednim klasičnim problemom: izračunati minimalnu brzinu meteora pomoću zakona održanja energije.

1-a (*) Posmatrajte Zemlju kao izolovan sistem. Za meteroid koji miruje u odnosu na Zemlju na beskonačnoj udaljenosti, nađite minimalnu brzinu na visini meteorske pojave ($h = 100km$) i pri udarcu u Zemlju. Navedite eksplicitno sve pretpostavke.

Uvedimo prvo oznake koje ćemo koristiti u ovom problemu. Za masu Sunca koristićemo $M_\odot$, za rastojanje Zemlja-Sunce d ($d = 1\,\mathrm{AU}$), a za masu i poluprečnik Zemlje $M_\oplus$ i $R_\oplus$ - svuda indeks $\odot$ označava Sunce, a indeks $\oplus$ Zemlju. Za masu meteoroida koristićemo m i za univerzalnu gravitacionu konstantu G. U ovom problemu indeks 0 označava početno stanje, a indeks 1 krajnje stanje sistema. Vektorske veličine su označene **boldface** fontom - npr. $\mathbf{r}$ je vektor položaja, a $r = |\mathbf{r}|$ je modulus vektora, tj. udaljenost.

Smatraćemo da je Zemlja idealna izotropna sfera (nije neophodno da bude i homogena), pa se njen gravitacioni potenicijal može zameniti izrazom za potencijal materijalne tačke. Takođe, smatraćemo da je Zemljina putanja oko Sunca približno kružna, sa radijusom d. Nula potencijalne energije je u beskonačnosti u celom problemu. U prvom delu problema, 'Zemlja kao izolovan sistem' znači da zanemarujemo Sunce i njegovo gravitaciono dejstvo, kao i Mesec i sve ostale mase - u ovom problemu Zemlja miruje sama u prostoru. Zanemarićemo i uticaj atmosfere i rotaciju Zemlje. Videćemo u kasnijim problemima kako da uračunamo sve zanemarene efekte.

Ovo je tipičan zadatak koji se rešava koristeći zakon održanja (mehaničke) energije - gravitaciona sila konzervativna, te energija mora biti održana, tj. ukupna energija početnog stanja (E_0) i krajnjeg stanja (E_1) su jednake $E_0 = E_1$.

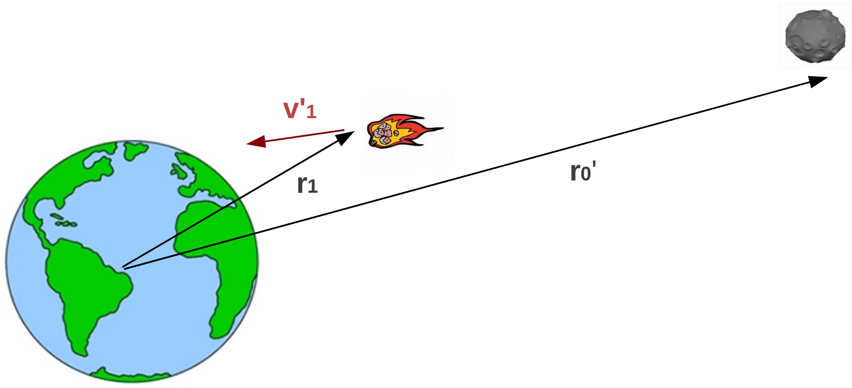

FIG. 1: Krajnji položaj čestice (meteorske pojave) je $\mathbf{r}_1$ a brzine v_1. Početni položaj je r_0' a početna brzina je nula.

Ako je meteoroid u početnom stanju na beskonačnom rastojanju od Zemlje $r_0 \to \infty$ i miruje u odnosu na Zemlju $v_0 = 0$, njegova ukupna početna energija je

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_\oplus m}{r_0} = 0.$$

U trenutku sagorevanja na visini $h = 100km$ iznad površine Zemlje, njegova brzina je $v_1 \neq 0$, a rastojanje od centra Zemlje je $r_1 = (R_\oplus + h)$. Krajnja energija je dakle

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_\oplus m}{r_1} = 0. \tag{1}$$

Poslednji znak jednakosti je posledica održanja energije. Prema tome imamo

$$v_1^2 = \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus + h} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus + h}}.$$

Direktnom zamenom veličina nalazimo $v_1 = 11.1\,\mathrm{km/s}$. Za slučaj $h = 0$, tj. za udarac u površinu, zanemarujući otpor vazduha nalazimo

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} \tag{2}$$

i $v_1 = 11.2\,\mathrm{km/s}$, što je druga kosmička brzina. Ovo nije slučajno - ako obrnemo redosled događaja dobijamo početno stanje sa česticom koja na površini Zemlje ima brzinu v_1, koja je taman tolika da u beskonačnosti izgubi svu kinetičku energiju i miruje naspram Zemlje, a to je upravo definicija druge kosmičke brzine. Jednačine održanja energije su iste kao gore, sa zamenom indeksa za početno i krajnje stanje $0 \leftrightarrow 1$.

1-b (*) Odgovor pod 1-a je podrazumevao *geocentričnu* brzinu - zakon održanja energije je dao brzinu u odnosu na *centar* Zemlje. Izračunajte minimalnu *topocentriču* brzinu (tj. u odnosu na tačku na površini Zemlje) kao funkciju geografske širine - jasno, ovde treba uračunati Zemljinu rotaciju. Kolika je ta brzina za Petnicu?

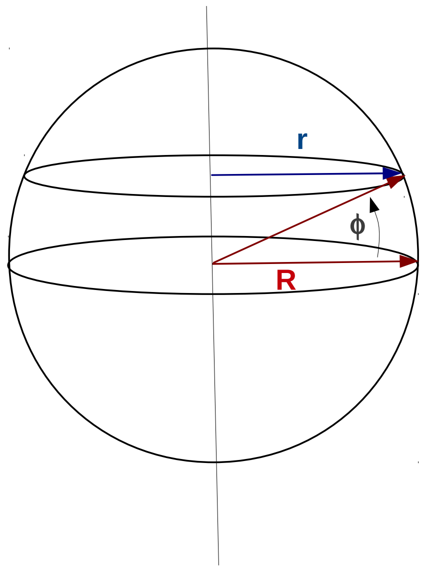

FIG. 2: Dužina (plavog) vektora $\mathbf{r}$ je $r = R_\oplus \cos\phi$. Obim malog kruga je $O = 2\pi r = 2\pi R_\oplus \cos\phi$, gde je ϕ geografska širina.

Obim Zemlje na polutaru je $2\pi R_\oplus$ a na geografskoj širini ϕ mali krug paralelan polutaru ima obim $2\pi R_\oplus \cos\phi$ (vidi sliku). Označićemo brzinu rotacije tačke na geografskoj širini ϕ sa v_ϕ. Tu brzinu ćemo naći iz zahteva da tačka u jednom periodu rotacije T (tj. u jednom danu) napravi jedan krug paralelno polutaru, te joj je brzina $v_\phi = 2\pi R_\oplus \cos\phi / T$. Jedino problematično pitanje je - brzina u odnosu na šta? Da li je ovde opravdano računati brzinu u odnosu na Sunce, ili na nepokretne zvezde (ili nešto treće)? U zavisnosti od toga ćemo za T uzeti period rotacije u odnosu na

Sunce (solarni dan) ili na zvezde (siderički dan)[1]. Relevantna brzina rotacije u ovom problemu mora biti u odnosu na česticu koja miruje u odnosu na centar Zemlje u beskonačnosti (vidi 1-c za detalje šta to tačno znači). Razmotrimo jedan primer koji će pojasniti koji je period ovde relevantan.

Zamislimo da je Zemlja uvek okrenuta jednom stranom prema Suncu, tj. da godina ima nula solarnih dana i jedan siderički dan. U tom slučaju siderički period rotacije je jedna godina, a solarni je beskonačan. Zanemarimo za trenutak gravitaciju Zemlje - i posmatrajmo česticu koja orbitira na Zemljinoj putanji (daleko od Zemlje, cf. 1-c). Ona u odnosu na centar Zemlje miruje. Ali u ovom slučaju ta čestica će uvek biti iznad iste tačke na Zemlji, tj. brzina Zemljine rotacije u odnosu na taj meteoroid je nula. Prema tome iz gornje formule za v_ϕ vidimo da period mora biti solarni! Isti zaključak mora važiti i za rotirajuću Zemlju, tj. u našem slučaju uzimamo $T = 24\,\mathrm{h}$. Ako ubacimo cifre u gornje formule, nalazimo da je brzina rotacije ma polutaru $v_0 = 0.46\,\mathrm{km/s}$, a u Penici ($\phi \approx 44^o$) je $v_\phi = 0.32\,\mathrm{km/s}$. Znači minimalna *topocentrična* brzina meteora koji sagoreva na visini of 100 km (što je brzina koju merimo sa fotografksih filmova / video kamera) je na polutaru 10.6 km/s, a u Petnici 10.8 km/s.

---

[1] Jasno da za slučaj Zemlje to nije previše bitno, jer je razlika između dve vrste dana mala.

1-c (**) Recimo da ste odgovor pod 1-a dali sa tačnošću od $\delta v = \pm 0.1 km/s$. Sa tom tačnosti nije neophodno da meteoroid krene iz beskonačnosti. Kolika može biti početna udaljenost meteoroida tako da rezultat bude tačan do na δv? Da li je opravdano zanemariti gravitaciono dejstvo Sunca na toj udaljenosti?

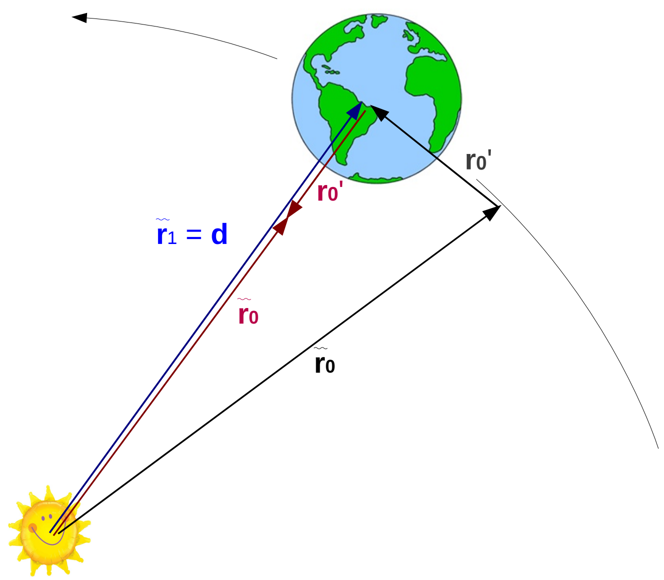

FIG. 3: Dva početna položaja čestice diskutovana u rešenju - početno odstojanje od Zemlje je na samoj Zemljinoj orbiti (crna boja) i normalno na orbitu (crvena boja).

Ovaj problem je važan zbog početne pretostavke da meteoroid *miruje* u odnosu na Zemlju. Kada se vratimo u Sunčev sistem, jasno da meteoroid koji miruje u odnosu na Zemlju, mora imati istu ugaonu brzinu revolucije i isti period revolucije oko Sunca kao i Zemlja. To može biti samo približno tačno samo za čestice koje su relativno blizu Zemljine putanje[2]. Dakle u ovom problemu ćemo videti da li naša pretpostavka

[2] Izuzetak su Lagranževe tačke, kojima ćemo se baviti u kasnijim problemima. U ovom problemu potpuno zanemarujemo pitanje *kako* su se čestice našle na takvoj putanji. Takođe zamemarujemo razliku brzina revolucija čestica u odnosu na Zemlju zbog male razlike u radijusu orbite. Ove efekte ćemo uračunati u kasnijim problemima.

izolovanje Zemlje ima smisla - ako nađemo da je potrebno da za datu tačnost δv čestica bude tako daleko od Zemlje da gravitacija Sunca mora biti uračunata, onda izolovana Zemlja nije dobra aproksimacija (osim za čestice na samoj putanji Zemlje - vidi dole).

Neka je početna udaljenost r_0', i krajnja brzina na udaljenosti $r_1 = R_\oplus$ od centra Zemlje $v_1' = v_1 \pm \delta v$. Mi tražimo maksimalno r_0', tako da je razlika između brzina $|\delta v| = v_1' - v_1 < 0.1\,\mathrm{km/s}$ manja od implicitne greške. Iz održanja energije sledi

$$\frac{1}{2} m \left(v_1'\right)^2 - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = -G\frac{M_\oplus m}{r_0'}. \tag{3}$$

Greška u brzini je mnogo manja od same brzine $(\delta v \ll v_1)$, pa je

$$(v_1')^2 = v_1^2 \pm 2 v_1 \delta v + \delta v^2 \approx v_1^2 \pm 2 v_1 \delta v,$$

i gornja jednačina (3) se svodi na

$$\frac{1}{2} m \left(v_1\right)^2 \pm \frac{1}{m} v_1 \delta v - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = -G\frac{M_\oplus m}{r_0'}$$

Leva strana se uprosti koristeći (1) pa dobijamo

$$\pm v_1 \delta v = -G\frac{M_\oplus}{r_0'} \;\Rightarrow\; r_0' = G\frac{M_\oplus}{v_1 \delta v},$$

gde rešenje postoji samo za znak minus, što je fizički jasno - ako čestica počne da pada sa manje 'visine', njena krajnja brzina će biti manja ($v_1' = v_1 - \delta v < v_1$). Ako iskoristimo (2)

$$r_0' = R_\oplus \frac{v_1}{2\delta v} \approx 50 R_\oplus.$$

Dakle ako je čestica na počentom rastojanju od Zemlje većem od oko $50R_\oplus$, kranja brzina meteora će se razlikovati za manje of $0.1\,\mathrm{km/s}$ od idealnog slučaja sa početkom na beskonačoj udaljenosti. Primetimo da je ova udaljenost manja od razdaljine Zemlja-Mesec!

Uračunajmo sada i gravitaciju Sunca. Ako povećamo r_0', razlika δv zbog Zemljine gravitacije će se smanjiti, ali će se tada povećati razlika u energije početnog i krajnjeg stanja u Sunčevoj gravitacinoj jami (ili neće zavisno od geometrije - vidi dole). Gravitacija Sunca će imati najmanji uticaj za minimalno r_0', tj. za veličinu koji smo upravo pronašli.

Da bismo našli da li je taj uticaj značajan, moramo uporediti našu dozvoljenu grešku $\delta v = 0.1km/s$ sa promenom krajnje brzine zbog uračunavanja Sunčeve gravitacije. Uz sve oznake kao i ranije, uvedimo novu oznaku za krajnju brzinu koja uračunava dejstvo Sunca $\tilde{v}_1' = v_1' \pm \delta\tilde{v}$, gde je $\delta\tilde{v}$ razlika u krajnoj brzini u odnosu na prethodni slučaj. Neka su $\tilde{r}_0$ i $\tilde{r}_1$ početna i krajnja udaljenost meteoroida *od Sunca*. Zakon održanja energije je sada

$$\frac{1}{2}m\left(\tilde{v}_1'\right)^2 - G\frac{M_\oplus m}{r_1} - G\frac{M_\odot m}{\tilde{r}_1} = -G\frac{M_\oplus m}{r_0'} - G\frac{M_\odot m}{\tilde{r}_0}. \tag{4}$$

Pošto čestica završi na površini Zemlje, krajnje udaljenosti su $r_1 = R_\oplus$ i $\tilde{r}_1 \approx d = 1\mathrm{AU}$ (jer je $R_\oplus \ll d$). U toj aproksimaciji $\tilde{\mathbf{r}}_1$ je vektor položaja Zemlje u odnosu na Sunce. Intuitivno je jasno da u slučaju kada je početni položaj meteoroida *na samoj orbiti* Zemlje, onda će veličina početnog i krajnjeg pložaja u odnosu na Sunce biti jednaki, tj. $\tilde{r}_0 = \tilde{r}_1 = d$ (crni vektori na slici). Kada je početni položaj meteoroida u odnosu na Zemlju *normalan na orbitu*, onda je $\tilde{r}_0 = \tilde{r}_1 \pm r_0' = d \pm r_0'$. Vidi fusnotu [3] za diskusiju ovog problema u terminima vektorske algebre, što nam može biti od koristi u budućim zadacima. U slučaju kada je meteoroid na putanji Zemlje, jednačina (4) postaje

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(\tilde{v}_1'\right)^2 - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} - G\frac{M_\odot m}{d} &= -G\frac{M_\oplus m}{r_0'} - G\frac{M_\odot m}{d} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}m\left(\tilde{v}_1'\right)^2 - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} &= -G\frac{M_\oplus m}{r_0'} \end{aligned}$$

što je identično sa jednačinom (3), pa je $\delta\tilde{v} = 0$ - tj. meteoroid na samoj putanju Zemlje (kružnoj, po pretpostavci) ne menja brzinu zbog interakcije sa Suncem.

Zanimljiviji je drugi slučaj. Tada jednačina (4) postaje

$$\frac{1}{2}m\left(\tilde{v}_1'\right)^2 - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} - G\frac{M_\odot m}{d} = -G\frac{M_\oplus m}{r_0'} - G\frac{M_\odot m}{d \mp r_0'}. \tag{5}$$

Videćemo dole da je izbor znakova $\pm$ i $\mp$ opravdan (mada se to da videti i iz održanja energije i Slike 3). Uz pretpostavku da je $\delta\tilde{v} \ll v_1'$

$$\begin{aligned}(\tilde{v}_1')^2 &= {v_1'}^2 \pm 2v_1'\delta\tilde{v} + \delta\tilde{v}^2 \approx {v_1'}^2 \pm 2v_1'\delta\tilde{v} \\ &\approx {v_1'}^2 \pm 2(v_1 + \delta v)\delta\tilde{v} \approx {v_1'}^2 \pm 2v_1\delta v\end{aligned}$$

gde smo u zadnjoj jednakosti zanemarili malu veličini višeg reda $\delta v\, \delta\tilde{v} \ll v_1\delta\tilde{v}$. Zamenom u (5) dobijamo

$$\frac{1}{2}m\left({v_1'}^2 \pm 2v_1\delta\tilde{v}\right) - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} - G\frac{M_\odot m}{d} = -G\frac{M_\oplus m}{r_0'} - G\frac{M_\odot m}{d \mp r_0'}.$$

i koristeći (3) sledi

$$\pm v_1\delta\tilde{v} = G\frac{M_\odot}{d} - G\frac{M_\odot}{d \pm r_0'} = G\frac{M_\odot}{d}\left(1 - \frac{1}{1 \mp r_0'/d}\right).$$

Kako je $r_0' \ll d$, koristeći razvoj $1/(1+\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon$ za $\varepsilon \ll 1$, dobijamo

$$\pm v_1\delta\tilde{v} = \pm G\frac{M_\odot}{d^2}r_0' \Rightarrow \delta\tilde{v} = G\frac{M_\odot}{d^2}\frac{r_0'}{v_1}.$$

Sada je očigledno da je gornji izbor znaka $\pm$ bio opravdan. Ova jednačina se može dalje pojednostaviti, ali ćemo taj pristup ostaviti za kasnije zadatke - sada je možemo rešiti jednostavnom zamenom poznatih veličina gde dobijamo

$$\delta\tilde{v} = 0.17\,\mathrm{km/s} > 0.1\,\mathrm{km/s}.$$

Jasno, da smo izabrali slučaj gde je r_0' veće od $50R_\oplus$, ova greška bi bila veća.

Dakle, kada izostavimo gravitaciju Sunca, pravimo grešku koja je veća od 0.1 km/s ako se meteoroid u početnom stanju nalazi na liniji Zemlja-Sunce. Pretpostavka o Zemlji kao izolovanom sistemu u okviru te tačnosti može imati smisla samo za čestice koje su u počenom stanju vrlo blizu Zemljine orbite. Ipak, greška koju pravimo je svega reda $\delta v/v_1 \approx 0.2/11.2 < 2\%$, što je za procene u prvoj aproksimaciji i za rezultat koji se dobija iz dve linije algebre i više nego zadovoljavajuće.

[3] Krajnji položaj meteorida se može izraziti kao vektor $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r'}_0$. Veličina koja nama treba je $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r'}_0$ Dužina ovog vektora zavisi od relativnog položaja Zemlje u odnosu na Sunce $\tilde{\mathbf{r}}_1$ i meteoroida u odnosu na Zemlju $\mathbf{r'}_0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_0 &= |\tilde{\mathbf{r}}_0| = \sqrt{(\tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r'}_0)^2} = \\
&= \sqrt{\tilde{r}_1^2 + r_0'^2 - 2\tilde{\mathbf{r}}_1\,\mathbf{r'}_0} \qquad \text{(koristimo } \tilde{r}_1 = d\text{)} \\
&= d\sqrt{1 - 2\tilde{\mathbf{r}}_1\,\mathbf{r'}_0/d^2 + (r_0'/d)^2} \qquad \text{(koristimo } r_0' \ll d\text{)} \\
&\approx d\sqrt{1 - 2\tilde{\mathbf{r}}_1\,\mathbf{r'}_0/d^2} \qquad \text{(koristimo } \sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2 \text{ za } \varepsilon \ll 1\text{)} \\
&\approx d - \tilde{\mathbf{r}}_1\,\mathbf{r'}_0/d \\
&\approx d \pm r_0' \cos\phi,
\end{aligned}$$

gde je ϕ ugao između vektora $\tilde{\mathbf{r}}_1$ i $\mathbf{r'}_0$. Ovaj rezultat je očigledan i iz same geometrije problema, bez upotrebe vektora. Razmotrimo dva specijalna slučaja iz teksta. Prvo, kada su vektori $\tilde{\mathbf{r}}_0$ i $\mathbf{r'}_0$ kolinearni, tj. kada je udaljenost r_0' normalna na putanju Zemlje (crveni vektori na slici), onda je $\phi = 0$ ili $\phi = 180^o$ i skalarni proizvod $\tilde{\mathbf{r}}_0\mathbf{r'}_0 = \pm\tilde{r}_0 r_0'$ i udaljenost $\tilde{r}_1 \approx d \pm r_0'$. Drugo, ako je udaljenost r_0' duž Zemljine putanje (crni vektori na slici), onda su vektori $\tilde{\mathbf{r}}_0$ i $\mathbf{r'}_0$ približno normalni $\phi = \pm 90^o$. Približno jer je $r_0' \ll d$, pa bi kosinus ugla imao prvi član u razvoju reda r_0'/d (jer je $\cos(90^o \pm \varepsilon) \approx \mp\varepsilon$ za $\varepsilon \ll 1$). Kako se u krajnjem rezultatu taj kosinus množi sa r_0', onda bi rezultirajućo član bio za faktor reda $(r_0'/d)^2$ manji u odnosu na vodeći član d, što je veličina koju smo već zanemarili. Dakle u drugom slučaju u okviru naše tačnosti skalarni proizvod je $\tilde{\mathbf{r}}_0\,\mathbf{r'}_0 = 0$ i udaljenost je $\tilde{r}_1 \approx \tilde{r}_0 = d$.