Problem 2: Maksimalna brzina meteora

Rešimo sada i drugi klasični problem: izračunati maksimalnu brzinu meteora pomoću zakona održanja energije. U delu (a) i (b) ćemo aproksimirati da je orbita planeta krug, u delu (c) i (d) ćemo koristiti elipsu.

2-a(*) Izračunati maksimalnu brzinu meteora koji potiče iz Sunčevog sistema za Zemlju i za Jupiter u odnosu na centar planete (bez rotacije). Ova 'maksimalna' maksimalna brzina podrazumeva česticu u beskonačnosi u odnosu na potencijalnu jamu Sunca, i direktan sudar sa planetom ('*head-on*', u nedostatku bolje fraze). Izračunati i 'minimalnu' maksimalnu brzinu, tj. brzinu u geometriji gde meteoroid stiže planetu otpozadi. Koliku grešku pravimo za Zemlju i za Jupiter ako u pomenutim brzinama *ne uračunamo* efekat gravitacionog privlačenja same planete?

2-b(*) Uračunavši rotaciju, naći topocentrične brzine iz poblema 2-a.

2-c(*) Putanja Zemlje nije kružnica već elipsa sa poznatim ekscentricitetom $e = 0.0167$. Pomoću drugog Keplerovog zakona i geometrijskih osobina elipse naći najveću i najmanju udaljenost Zemlja-Sunce i odgovarajuće linearne brzine revolucije Zemlje na orbiti.

2-d(*) Uračunavši sve efekte (gravitaciju Sunca i Zemlje, i eliptičnost Zemljine orbite) - kolika je maksimalna geocentrična brzina meteora iz Sunčevog sistema? Kolika je minimalana brzina meteora koji *nije* iz Sunčevog sistema? Uračunati i rotaciju za maksimalnu (minimalnu) topocentričnu brzinu.

I. UVOD I NUMERIČKE VREDNOSTI

Da nađemo brzine sudara planeta i meteoroida treba da izračunamo

(i) brzinu same planete u Sunčevom sistemu

(ii) brzinu meteoroida pre interakcije sa planetom

(iii) promenu brzine meteorida pri interakciji sa planetom

(iv) uticaj rotacije planete

Prvo ćemo razmatrati aproksimaciju kružnih orbita, gde čemo dobiti standardne vrednosti maksimalne brzine meteorita koja se najčešće nalazi u meteorskoj (amaterskoj) literaturi. Onda ćemo uzeti u obzir i eliptičnost Zemljine orbite i videti da ona ima značajan i merljiv uticaj na brzine meteora.

Svi numerički podaci koje ćemo koristiti su uzeti sa engleske verzije Vikipedije.

Univerzalna gravitaciona konstanta je $G = 6.67 * 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

Mase Sunca (nadalje označeno indeksom $\odot$), Zemlje (indeks $\oplus$) i Jupitera (indeks ♃) su respektivno $M_\odot = 1.99 * 10^{30} kg$, $M_\oplus = 5.97 * 10^{24} kg$ i $M_{♃} = 1.90 * 10^{27} kg$.

Prosečna udaljenost Zemlja-Sunce koju obično nazivamo astronomska jedinica je $r_\oplus = 1AU = 149.6 * 10^6$km. Ovu veličinu ćemo koristiti kao poluprečnik približno kružne putanje Zemlje. Astronomska jedinica je zapravo velika poluosa Zemljine eliptične putanje, što ćemo koristiti u drugom delu zadatka. Ekscentricitet Zemljine putanje je $e_\oplus = 0.0167$. Ekvatorijalni radijus Zemlje je $R_\oplus = 6.38 * 10^3$ km, siderički period rotacije je $T = 23.9$ h i stoga je brzina rotacije na ekvatoru u geocentričnom sistemu $v_\odot^{(rot)} = 2\pi R_\oplus / T = 0.465$ km/s.

Velika poluosa Jupiterove putanje je $r_{♃} = 5.20 AU = 7.79 * 10^8$km. Ekvatorijalni radijus Jupitera je $R_{♃} = 7.15 * 10^4$km, a siderički period rotacije je $T = 9.92 h$. Prema tome brzina rotacije na ekvatoru je u jovicentričnom sistemu $v_{♃}^{(rot)} = 2\pi R_{♃} / T = 12.6$ km/s.

Zapazimo dve stvari u vezi nabrojanih veličina. Prvo, vrednosti su date sa tri značajne cifre, pa prema tome i krajnji rezultat ne može imati veću tačnost od toga. Drugo, relevantni periodi rotacije su *siderički*, tj. vezani za nepokretne zvezde, ne za Sunce. Kretanje oko Sunca će biti uračunato brzinom revolucije, pa bi korišćenje solarnog dana (koji u sebi ima uračunatu revoluciju) dovelo do duplog uračunavanja te brzine. Međutim, u našem slučaju ova razlika je čisto principijalne prirode, jer se konačni rezultati ne bi razlikovali sa tačnošću podataka koje koristimo.

II. BRZINA PLANETA NA KRUŽNOJ ORBITI

Pošto se po pretpostavci planete kreću po kružnim orbitama, podsetimo se prvo kinematike unifromnog kružnog kretanja. Telo koje se kreće po kružnici poluprečnika r konstantom brzinom v, na svakoj tački putanje mora imati centripetalno ubrzanje a_c (koje je usmereno prema centru kružnice i stoga normalno na vektor brzine)

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{1}$$

gde je $\omega = v/r$ ugaona brzina planete (izražena u radijanima po jedinici vremena). Primetimo da je ovo čisto kinematički koncept - da bi se telo kretalo konstantnom brzinom *po kružnici* ono mora imati dato ubrzanje. Bez ubrzanja ono bi se naravno kretalo konstantom brzinom *po pravoj liniji*, po drugom Njutnovom zakonu.

Slučaj koji nas zanima je gravitaciona interakcija dva tela masa m i M, gde je $M \gg m$ - na primer veštački satelit na orbiti oko planete, ili planeta na orbiti oko Sunca. U ovom slučaju masivnije telo M je približno u stanju mirovanja i telo m orbitira oko njega na kružnici radijusa r. Referentni sistem u kome Sunce miruje se naziva *heliocentrični sistem*. Pošto je jedina sila koja postoji u ovom modelu gravitaciona sila ($F_g = GmM/r^2$), centripetalno ubrzanje tela m može biti jedino ubrzanje gravitacione sile $a_g = F_g/m = GM/r^2$. Dakle $a_c = a_g$ i prema tome

$$\frac{v_o^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{2}$$

gde je v_o linearna brzina planete na kružnoj orbiti. Pošto je period T orbite vreme potrebno da se opiše kružnica prečnika r brzinom v_o imamo da je

$$T = \frac{2\pi r}{v_o} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2}. \tag{3}$$

Prema tome, kako se udaljenost od centralne mase (u našem slučaju Sunca) povećava, brzina na orbiti se smanjue kao $v_o \sim 1/r^{1/2}$, a period revolucije se povećava kao $T \sim r^{3/2}$.

Ako u jednačine ubacimo numeričke vrednosti za Zemlju dobijamo $v_\oplus = 29.8$ km/s i $T = 365.24 \approx 365$ dana[1], tj. jedna godina, kao što i očekujemo.

Za Jupiter dobijamo $v_♃ = 13.1$ km/s i period od $T = 4330$ (zemaljskih) dana.

III. MAKSIMALNA BRZINA METEOROIDA U SUNČEVOM SISTEMU

Sledeći korak je nalaženje maksimalne brzine meteoroida pre sudara sa planetom. Za to koristimo održanje energije - pristup je identičan onome korišćenom za rešenje Problema 1(a). Ako bi meteoroid na 'spoljnoj granici' Sunčevog sistema imao konačnu brzinu, on bi otišao u beskonačnost i prema tome ne bi bio deo Sunčevog sistema. Maksimalna brzina meteoroida iz Sunčevog sistema mora biti manja od one na paraboličnoj orbiti[2] - telo na paraboličnoj orbiti ima nultu brzinu u beskonačnosti. Ako za nulu gravitacione potencijalne energije, kao i obično, uzmemo tačku u beskonačnosti, onda je početna ukupna energija takvog meteoroida jednaka nuli. Ako se takvo telo mase m kasnije nađe na udaljenosti r od Sunca, onda zbog održanja energije imamo

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{m}}^2 - G\frac{M_\odot m}{r} = 0 \;\Rightarrow\; v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r}}. \tag{4}$$

gde je v_{m} maksimalna moguća heliocentrična brzina na udaljenosti r od Sunca za meteoroid koje je i dalje u Sunčevom sistemu. Primetimo da je ova brzina jednaka brzini na kružnoj orbiti iz prethodnod dela pomnoženoj sa $\sqrt{2}$.

Ako u jednačinu (4) ubacimo vrednosti za udaljenost Zemlje, dobijamo za maksimalnu moguću brzinu meteoroida na $1AU$ od Sunca $v_{m\oplus} = 42.1$ km/s. Na udaljenosti Jupitera od

---

[1] Krajnji rezultat je godina od 365 dana, iako smo računicom dobili 365.24 dana, tj. vrednost blizu sideričke godine od 365.256 dana (ili još bliže gregorijanskoj godini od 365.2425 dana). Taj prividno tačniji rezultat koji smo odbacili je *čista slučajnost*! Naši podaci imaju tri značajne cifre, prema tome cifra na četvrtom mestu je numerički šum, koji je ovde igrom slučaja daje 'tačniju' vrednost.

[2] Zašto je ova orbita parabolična ovde nije bitno - time ćemo se baviti u kasnijim problemima. Jedino što je važno za ovaj problem je da telo beskonačno daleko od Sunca ima nultu brzinu.

Sunca dobijamo maksimalnu brzinu meteoroida $v_{m♃} = 18.5$ km/s.

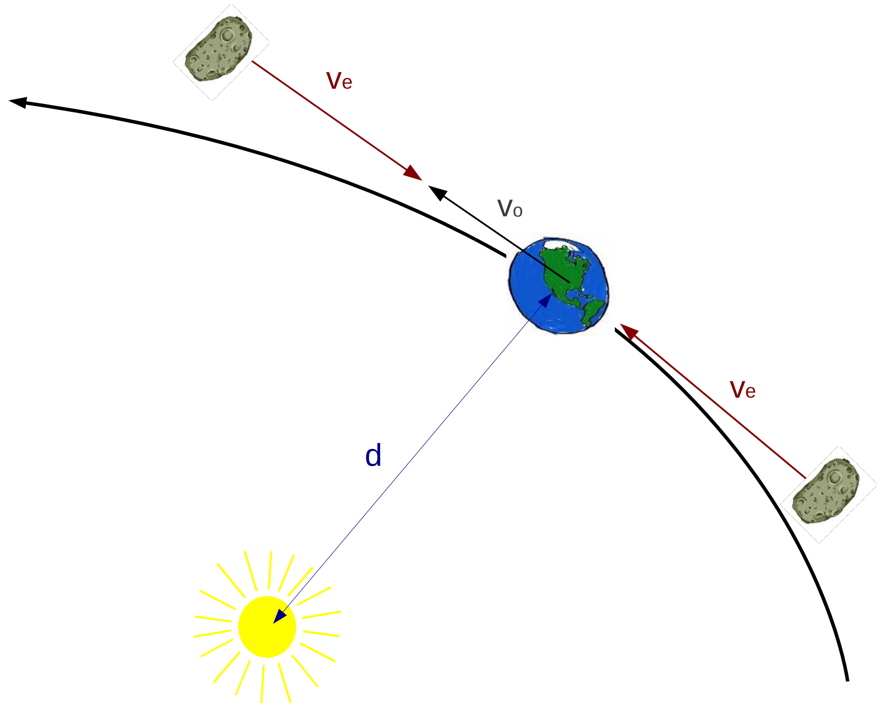

FIG. 1: Heliocentrične brzine u geometriji direktnog sudara spreda i otpozadi. Brzina Zemlje na orbiti je označena sa v_o, dok je v_e maksimalna heliocentrična brzina metoroida na udaljenosti od 1AU.

Ako se meteoroid približava planeti u direktnom sudaru spreda i otpozadi (vidi sliku) onda je relativna brzina planete i meteoroida za Zemlju

$$\text{spreda} \quad : \quad v_{m\oplus}^{(+)} = v_{m\oplus} + v_{\oplus} = 42.1 + 29.8 = 71.9 \text{ km/s} \tag{5}$$

$$\text{otpozadi} \quad : \quad v_{m\oplus}^{(-)} = v_{m\oplus} - v_{\oplus} = 42.1 - 29.8 = 12.3 \text{ km/s.} \tag{6}$$

Na isti način za relativne brzine u odnosu na Jupiter dobijamo

$$\text{spreda} \quad : \quad v_{m♃}^{(+)} = v_{m♃} + v_{♃} = 18.5 + 13.1 = 31.6 \text{ km/s} \tag{7}$$

$$\text{otpozadi} \quad : \quad v_{m♃}^{(-)} = v_{m♃} - v_{♃} = 18.5 - 13.1 = 5.4 \text{ km/s.} \tag{8}$$

Ovo su zapravo brzine meteoroida u dve geometrije u planeto-centričnom (tj. geocentričnom i jovicentričnom) sistemu. Ove bi takođe bile maksimalne brzine udara meteorita u planetu *bez uračunate gravitacije same planete.* U sledećem koraku ćemo uračunati gravitaciju planete.

IV. METEOROID U GRAVITACIONOM POLJU PLANETE

U prethodnoj sekciji smo počeli sa meteoroidom koji je bio daleko od Sunca i završio na samoj orbiti planete. Pretpostavimo da je sada meteoroid *daleko od same planete*, tako da se gravitaciono dejstvo planete može u prvom trenutku zameriti. Koliko daleko je dovoljno daleko za datu tačnost podataka smo diskutovali u Problemu 1(c).

Da ne bismo uvodili dodatne oznake za 'planetu', izračunajmo prvo maksimalnu brzinu pada meteorita na Zemlju - jednačine za Jupiter su identične sa zamenom indeksa planete $\oplus \leftrightarrow ♃$. Posmatrajmo sada održanje energije u *geocentričnom sistemu*. Neka je početna brzina meteoroida u odnosu na Zemlju $v_{m\oplus}^{(\pm)}$, gde se znak $\pm$ odnosi na geometriju iz prethodne sekcije (direktan sudar spreda i otpozadi). Neka je $v_{F\oplus}^{(\pm)}$ finalna brzina udara meteorita u planetu. Zakon održanja energije onda daje

$$\frac{1}{2}mv_{m\oplus}^{(\pm)2} = \frac{1}{2}mv_{F\oplus}^{(\pm)2} - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} \tag{9}$$

$$\left(v_{F\oplus}^{(\pm)}\right)^2 = \left(v_{m\oplus}^{(\pm)}\right)^2 + \frac{2M_\oplus m}{R_\oplus}. \tag{10}$$

Iako već u ovaj izraz možemo ubaciti poznate vrednosti, primetimo da je drugi sabirak na desnoj strane jednačine (10) zapravo druga kosmička brzina za planetu, izračunata u Problemu 1(a)

$$v_{e\oplus} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}, \tag{11}$$

pa je prema tome finalna brzina udara

$$v_{F\oplus}^{(\pm)} = \sqrt{\left(v_{m\oplus}^{(\pm)}\right)^2 + \left(v_{e\oplus}\right)^2}. \tag{12}$$

Za Zemlju dobijamo geocentrične brzine

$$\text{spreda} \quad : \quad v_{F\oplus}^{(+)} = \sqrt{71.9^2 + 11.2^2} = 72.8 \text{ km/s} \tag{13}$$

$$\text{otpozadi} \quad : \quad v_{F\oplus}^{(-)} = \sqrt{12.3^2 + 11.2^2} = 16.6 \text{ km/s}. \tag{14}$$

Meteorit geocentrične brzine preko 72.8 km/s ne može biti iz Sunčevog sistema. Međutim, nije neophodno da meteorit ima toliko brzinu da bismo identifikovali kao telo porekla van našeg sistema - zavisno od geometrije već i brzina od samo 16.6 km/s može biti dovoljna[3].

Zamislimo da smo obrnuli redosled događaja, i kao početno stanje uzeli telo koje je lansirano brzinom od 16.6 km/s *u pravcu kretanja Zemlje*. Zakon održanja energije će biti identičan kao i pre (9), sa zamenjenom početnim i krajnjim stanjem. Kada se oslobodi Zemljinog gravitacionog polja, telo će imati geocentričnu brzinu od 12.3 km/s, tj. heliocenričnu brzinu od 42.1 km/s (jednačina (5)), što bi bilo dovoljno da se udalji u beskonačnost od Sunca sa konačnom brzinom nula (jednačina (4)). Drugim rečima, ako bismo lansirali đule u pravcu revolucije Zemlje sa brzinom od 16.6 km/s, ono bi napustilo Sunčev sistem. Zboga toga se ova brzina nekad zove *treća kosmička brzina*[4].

Da nađemo odgovarajuće vrednosti za Jupiter, najpre ćemo izračunati drugu kosmičku brzinu $v_{e♃} = \sqrt{2GM_♃/R_♃} = 59.5$ km/s. Onda nalazimo da su maksimalne jovicentrične brzine udarca meteorita

$$\text{spreda} \quad : \quad v_{F♃}^{(+)} = \sqrt{31.6^2 + 59.5^2} = 67.4 \text{ km/s} \tag{15}$$

$$\text{otpozadi} \quad : \quad v_{F♃}^{(-)} = \sqrt{5.4^2 + 59.5^2} = 59.7 \text{ km/s.} \tag{16}$$

Odmah se vidi da je razlika između dve brzine mnogo manja za Jupiter nego za Zemlju. Pogledajmo koliku grešku bismo napravili da nismo uračunali gravitaciono dejstvo planete, već jednostavno koristili brojke za $v_{m\oplus}^{(\pm)}$ iz prethodne sekcije. Relativnu grešku računamo kao

$$\delta v_{\oplus}^{(\pm)} = \frac{v_{F\oplus}^{(\pm)} - v_{m\oplus}^{(\pm)}}{v_{F\oplus}^{(\pm)}}, \tag{17}$$

i slično za Jupiter sa promenom indeksa $\oplus \leftrightarrow ♃$.

[4] Za treću kosmičku brzinu se u literaturi može naći vrednost 16.7 km/s. Razlika dolazi od tačnosti s kojom smo počeli račun i zaokruživanja vrednosti. Vrednost koju smo našli je tačna u okviru naše greške.

[3] Ovde treba napomenuti i kako ovaj račun *ne treba raditi*. Naime, može izgledati kao dobar pristup da se odjednom uračuna gravitaciono polje i Zemlje i Sunca, tako što će se meteoroid dovesti sa spoljnih granica Sunčevog sistema (iz stanja mirovanja i sa početnom nultom potencijalnom energijom) odmah u polje Zemlje, gde bi održanje energije bilo

$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{WRONG}}^2 - G\frac{mM_\odot}{r_\oplus} - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} = 0. \tag{18}$$

Onda bi se na tako izračunatu brzinu meteoroida dodala brzina revolucije Zemlje oko Sunca. Međutim gornja jednačina ne može biti tačna. Razlog je što je u početnom stanju meteoroid *u stanju mirovanja i u odnosu na Sunce i u odnosu na Zemlju* - početna kinetička energija na desnoj strani jednačine jednaka nuli. Kako se geocentrični i heliocentrični sistem kreću jedan u odnosu na drugi, takva situacija je nemoguća. Pravilan pristup, koji smo mi koristili, je da se doprinosi energija Sunca i Zemlje računaju u svaki u svom sistemu, a brzine u dva sistema povezana Galilejevim transformacijama. Ako još niste ubeđeni da jednačina (18) daje pogrešan rezultat, možete probati da izračunate brzinu v_{WRONG} i na nju dodate/oduzmete brzinu revolucije Zemlje $\pm v_\oplus$ i videćete da je rezultat različit od onog koji smo ranije dobili.

Za Zemlju nalazimo $\delta v_{\oplus}^{(+)} = 1.2\%$ i $\delta v_{\oplus}^{(-)} = 26\%$, a za Jupiter $\delta v_{♃}^{(+)} = 53\%$ i $\delta v_{♃}^{(-)} = 91\%$.

Iz ovih brojki vidimo da je Zemljino gravitaciono polje relativno mala perturbacija gravitacionog polja Sunca. Izostavljanje Zemljinog gravitacionog privlačenja bi nam i dalje dalo dobre procene za maksimalne brzine meteorita u dve razmatrane geometrije. S druge strane, Jupiter ima dominantan uticaj u svom delu Sunčevog sistema, i zanemarivanje njegovog gravitacionog polja bi nam dalo razultate koji su pogrešni za red veličine.

Sa tim u vidu vratimo se još jednom na Problem 1(c) i pretpostavku sa početka ove sekcije - da je meteoroid na orbiti planete ali još uvek daleko od same planete. Da li to uopšte može biti zadovoljeno sa zadavoljavajućom tačnošću? U Problemu 1(c) smo našli da za Zemlju u najgorem mogućem slučaju (nulta početna brzina) udaljenost mora biti reda $\approx$ $300,000$ km da bi dobili tačnost od 0.1 km/s. Ako ponovimo isti račun za Jupiter, nalazimo da je potrebna početna udaljenost od preko $20,000,000$ km, ili oko $1/7AU$. Dakle, iako Jupiter gravitaciono dominira svojom okolinom, i dalje je relativno lako smestiti meteoroid na njegovu orbitu tako da je potrebe našeg problema on ‘beskonačno daleko‘ od same planete.

V. TOPOCENTRIČNA BRZINA

Pošto je brzina rotacija Zemlje na ekvatoru $v = 0.465$ km/s, maksimalnu topocentričnu brzinu u sudaru spreda ćemo naći na strani planete koja rotira ka meteoroidu kao $v_{T\oplus}^{(+)} = 72.8 + 0.5 = 73.3$ km/s. Minimalnu brzinu za telo van Sunčevog sistema nalazimo pri sudaru otpozadi na strani planete koja rotira od meteoroida kao $v_{T\oplus}^{(-)} = 16.6 - 0.5 = 16.1$ km/s.

Za Jupiter smo našli brzinu rotacije na ekvatoru $v_{♃}^{rot} = 12.6$ km/s, pa su odgovarajuće topocentrične brzine $v_{T♃}^{(+)} = 67.4 + 12.6 = 80.0$ km/s i $v_{T♃}^{(-)} = 59.7 - 12.6 = 47.1$ km/s. Zanimljivo je da, iako su zbog velike mase Jupitera razlika maksimalnih brzina u dve geometrije nije bila velika, kada uračunamo rotaciju (Jupiter ima najbržu linearnu brzinu rotacije u Sunčevom sistemu), razlika relevantnih topocentričnih brzina postaje značajna.

VI. ELIPTIČNA PUTANJA PLANETE

Po definiciji je velika poluosa elipse Zemljine putanje jednaka $a = 1AU$, gde je Sunce u jednom fokusu. Znajući ekscentricitet e, iz geometrijskih osobina elipse (vidi sliku) nalazimo da je udaljenost između centra elipse i fokusa je $c = a * e$, pa je udaljenost Zemlje od Sunca u perihelu i afelu $r_p = a - c = a(1 - e)$ i $r_a = a + c = a(1 + e)$. Takođe možemo naći malu poluosu kao $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Iz poznate vrednosti za Zemljinu orbitu $e = 0.0167$ nalazimo $r_a = 152.1 * 10^6$ km i $r_p = 147.1 * 10^6$ km.

Da bismo našli brzine u perihelu i afelu poslužićemo se drugim Keplerovim zakonom[5] -

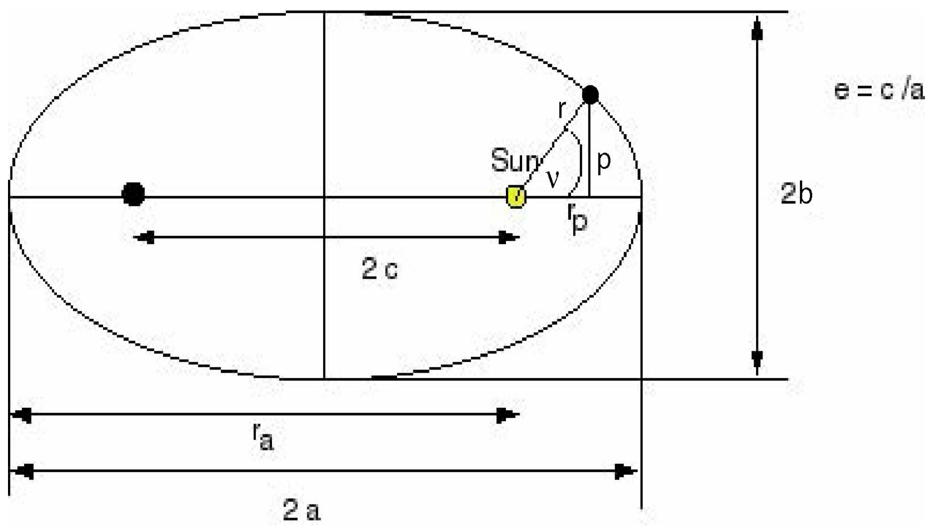

FIG. 2: Elementi elipse: a i b su velika i mala poluosa, e je ekscentricitet, $c = a * e$ je žižna daljina. Udaljenost perihela i afela putanje od Sunca je označeno sa r_p i r_a. Druge veličine označene na slici ne koristimo u ovom problemu.

u jedinici vremena površina koju prebriše vektor položaja čestice na putanji je jednaka za svaki položaj čestice na orbiti. Pošto je površina prebrisana u jedinici vremena konstantna, onda je ona jednaka prosečnoj prebrisanoj površini.

[5] Drugi Keplerov zakon je posledica održanja momenta impulsa u sistemu sa centralnom silom. Mogu se izvesti eksplicitne formule za brzine koje su nam potrebne - uz malo sreće tom temom ćemo se baviti u problemima koji slede.

U jednoj godini, vektor položaja čestice prebriše celu površinu elipse. Površina elipse je $S = ab\pi = a^2\sqrt{1-e^2}$. Jedna godina ima približno $T = 3.156 * 10^7 s$. Prosečna površina prebrisana vektorom položaja u jednoj sekundi je $\sigma_0 = S/T$. Po Keplerovom zakonu, tu istu površinu u sekundi vektor položaja mora prebrisati i u perihelu i afelu. Kako su perihel i afel ekstremne tačke na Zemljinoj orbiti, vektor položaja je normalan na vektor brzine, pa površinu prebrisanu u kratkom vremenskom periodu $t_0 = 1$ s možemo naći iz pravouglog trougla kao $S_0 = \frac{1}{2} v * t_0 * r$. Onda iz drugog Keplerovog zakona sledi da je $\sigma_0 = \frac{S_0}{t_0} = \frac{1}{2} v_p r_p = \frac{1}{2} v_a r_a$. Dakle, brzinu Zemlje u perihelu nalazimo kao

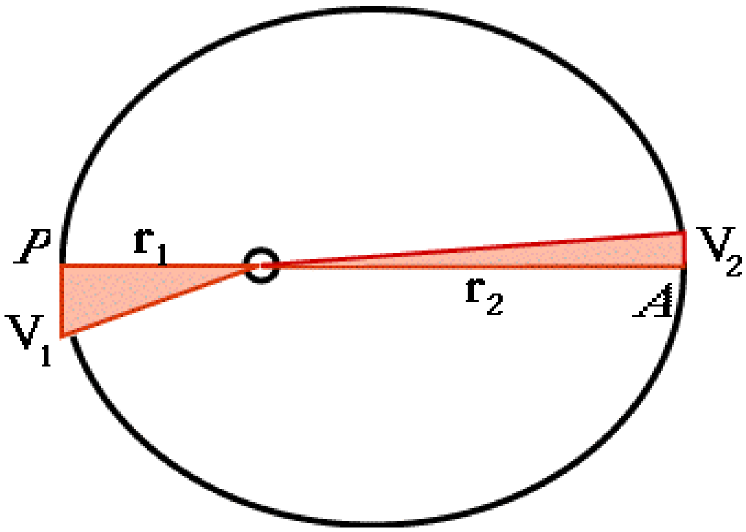

FIG. 3: Pravougaoni trougli koji se koriste za drugi Keplerov zakon u perihelu i afelu orbite. Jedna sekunda je dovoljno kratak period da je rastojanje koje telo pređe približno prava linija. Za proizvoljnu tačku na orbiti zakon nije tako jednostavno primeniti, jer brzina na elipsi generalno nije normalna na vektor položaja, te trouglovi ne bi bili pravougaoni.

$$v_p = 2\frac{\sigma_0}{r_p} = \frac{2S}{T}\frac{1}{a(1-e)} = \frac{2}{T}\frac{a^2\pi\sqrt{1-e^2}}{a(1-e)} = \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \tag{19}$$

i slično tome brzinu u afelu nalazimo kao

$$v_a = 2\frac{\sigma_0}{r_a} = \frac{2S}{T}\frac{1}{a(1+e)} = \frac{2}{T}\frac{a^2\pi\sqrt{1-e^2}}{a(1+e)} = \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}. \tag{20}$$

Jasno, u limitu kada je ekscentricitet nula, elipsa postaje kružnica, i obe jednačine se svode na konstantnu brzinu na kružnoj putanju $v = 2\pi a/T$. Ako u gornje formule ubacimo poznate numeričke vrednosti, dobijamo $v_a = 29.3$ km/s i $v_p = 30.3$ km/s.

VII. MAKSIMALNE BRZINE METORA NA ELIPTIČNOJ ORBITI ZEMLJE

Sada imamo sve potrebne podatke da izračunamo maksimalne brzine udara meteorita u afelu i perihelu. Iz (4) nalazimo da je maksimalna heliocentrična brzina meteoroida na udaljenosti perihela i afela Zemljine orbite

$$\text{perihel} \quad : \; v_{\mathrm{m,\,p}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_p}} = 42.5 \text{ km/s} \tag{21}$$

$$\text{afel} \quad : \; v_{\mathrm{m,\,a}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_a}} = 41.8 \text{ km/s.} \tag{22}$$

Onda iz (5) dobijamo geocentrične brzine tog meteoroida u perihelu i afelu Zemljine putanje za dve razmatrane geometrije kao

$$\begin{aligned} v_{m,p}^{(+)} &= v_{m,p} + v_p = 42.5 + 30.3 = 72.8 \text{ km/s} \\ v_{m,p}^{(-)} &= v_{m,p} - v_p = 42.5 - 30.3 = 12.2 \text{ km/s} \\ v_{m,a}^{(+)} &= v_{m,a} + v_a = 41.8 + 29.3 = 71.1 \text{ km/s} \\ v_{m,a}^{(-)} &= v_{m,a} - v_a = 41.8 - 29.3 = 12.5 \text{ km/s.} \end{aligned}$$

Napokon iz (12) nalazimo finalnu brzinu udara meteorita u svakoj od geometrija

$$\begin{aligned} v_{F,p}^{(+)} &= \sqrt{72.8^2 + 11.2^2} = 73.7 \text{ km/s} \\ v_{F,p}^{(-)} &= \sqrt{12.2^2 + 11.2^2} = 16.6 \text{ km/s} \\ v_{F,a}^{(+)} &= \sqrt{71.1^2 + 11.2^2} = 72.0 \text{ km/s} \\ v_{F,a}^{(-)} &= \sqrt{12.5^2 + 11.2^2} = 16.8 \text{ km/s.} \end{aligned}$$

Dakle apsolutna najveća geocentrična brzina meteorita koji dolazi iz Sunčevog sistema od 73.7 km/s će se naći u perihelu Zemljine orbite. Takođe, apsolutna najmanja geocentrična brzina meteorita koji *ne dolazi* iz Sunčevog sistema od 16.6 km/s će se takođe naći u perihelu.

Ako nas umesto brzine udara meteorita zanima brzina meteora pri sagorevanju na visini od $h = 100$ km, onda ćemo u gornjim formulama umesto druge kosmičke brzine na površini koristiti vrednost na toj visini $v = 11.1$ km/s (vidi Problem 1(a)). Za brzine pri sagorevanju meteora onda dobijamo (F' označava da je u pitanju finalna brzina na 100 km): $v^{(+)}_{F',p} = 73.6$ km/s, $v^{(-)}_{F,p} = 16.5$ km/s, $v^{(+)}_{F',a} = 72.0$ km/s i $v^{(-)}_{F',a} = 16.7$ km/s.

Napokon, kada na gore pomenute brzine dodamo i brzinu rotacije Zemlje na polutaru, nalazimo ekstremne vrednosti *topocentričnih brzina* kao (oznake kao i gore, indeks T za topocentričnost):

$$\begin{aligned}
v^{(+)}_{T,p} &= 73.7 + 0.5 = 74.2 \text{ km/s} \\
v^{(-)}_{T,p} &= 16.6 - 0.5 = 16.1 \text{ km/s} \\
v^{(+)}_{T,a} &= 72.0 + 0.5 = 72.5 \text{ km/s} \\
v^{(-)}_{T,a} &= 16.8 - 0.5 = 16.3 \text{ km/s.}
\end{aligned}$$

Dok na visini meteorske pojave $h = 100$ km imamo brzine $v^{(+)}_{T',p} = 74.1$ km/s, $v^{(-)}_{T',p} = 16.0$ km/s, $v^{(+)}_{T',a} = 72.5$ km/s i $v^{(-)}_{F',a} = 16.2$ km/s.

Naravno, da li meteoroid pripada Sunčevom sistemu se određuje iz heliocentričnih brzina, ali pri analizi snimaka prirodno se prvo izračunava topocentrična brzina. Rezultat sa topocentričnom brzinom od preko 74 km/s sam po sebi ne garantuje da je objekat ekstrasolarne prirode, kao što ni topocentrična brzina od svega 16 km/s ne garantuje da nije, zavisno od geometrije sudara i položaja Zemlje na svojoj orbiti.